Муниципальное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №32

Проект по математике

Тема: Проблема альтруизма в некооперативной теории игр.

Работу выполнил: Кириленко Денис Александрович,

ученик 11 А класса МОУ СОШ №32

Руководитель работы: Милосердова Альбина Владимировна ,

учитель математики МОУ СОШ №32

Комсомольск-на-Амуре,

2022 год

СОДЕРЖАНИЕ

[Введение 3](#_Toc121089298)

[Раздел I. ТЕЗАУРУС 5](#_Toc121089299)

[1. Определение игры. 5](#_Toc121089300)

[2.Стратегии. Доминирование. 8](#_Toc121089301)

[3.Игровые равновесия. 10](#_Toc121089302)

[4.Приоритет стратегии. Функция выбора. 19](#_Toc121089303)

[5.Информационная база игрока. 22](#_Toc121089304)

[Раздел II. ИГРОВОЙ АНАЛИЗ. 24](#_Toc121089305)

[1.Завязка игры. 24](#_Toc121089306)

[2.Воплощение. 28](#_Toc121089307)

[3.Развязка игры. 30](#_Toc121089308)

[РАЗДЕЛ III. АЛЬТРУИЗМ В ТЕОРИИ ИГР 35](#_Toc121089309)

[Заключение. 40](#_Toc121089310)

[Список использованной литературы. 41](#_Toc121089311)

[ПРИЛОЖЕНИЯ 42](#_Toc121089312)

## Введение

Необходимость формально представить взаимодействия между рациональ­ными субъектами, оценить всевозможные варианты развития собы­тий и взаимо­отношений была выражена в математической теории игр. Совре­менная теория игр делится на кооперативную и некооперативную. Разрешение коопера­ции делает возможным анализ вкладов всех участников (далее – игро­ков) и определение роли каждого из них в достижении результата. Запрет кооперации позволяет рассматривать индивидуальное поведение игроков, их взаимодействие и противоборство.

Теория игр применяется во многих областях науки, прежде всего, гумани­тарного (социология, политология, экономика, философия) и естественнона­учного (биология) направлений. В связи с этим современная теория игр не­однородна.

Эта работа посвящена исследованию структуры некооперативной игры, а также возможности разрешения противоречий между игроками путем аль­труисти­ческого взаимодействия. Игроки в математической теории игр обяза­ны действовать рационально, таким образом, возникает вопрос о воз­можности действовать альтруистично с точки зрения математики.

Первый раздел работы посвящен исследованию сути теории игр, второй посвящен собственно анализу игры, а в третьем рассматривается сущность концепции альтруистического поведения.

Цель работы: определить сущность концепции альтруизма в современной некооперативной теории игр.

Задачи:

1. Обобщить современные теоретико-игровые знания в области некооперативных игр.

2. Создать концепцию игрового анализа.

3. Аналитически сформировать рациональное представление об игровом альтруизме.

Объект исследования: некооперативная теория игр.

Предмет исследования: некооперативный игровой альтруизм.

Гипотеза: современная теоретико-игровая концепция альтруистического поведения не удовлетворяет критериям рациональности.

Методы исследования: контент-анализ научной литературы в области некооперативной теории игр, аналитическое рассуждение.

Проблема исследования: возможно ли рациональное альтруистическое поведение?

## Раздел I. ТЕЗАУРУС

### 1. Определение игры.

Главными объектами изучения теории игр являются игры, игровые ситуа­ции и стратегии. Начнем исследование индуктивно, с игроков – главных дей­ствующих лиц.

Кто может быть игроком? Сколько их может быть? Для различных игр от­веты на эти вопросы будут разниться. В одних играх игроков двое, в общем виде игры могут включать бесконечное множество игроков. В одном все игры сходятся – игрок не может быть единственным. Сущность игры заключается в соревновании, получении выгоды, как взаимной, так и независимой или несовмес­тимой (игры с нулевой суммой).

Один игрок может преследовать собственные интересы в конкуренции с чужими. Такие игры, как пасьянс или некоторые настольные не являются играми математически. Если вторым игроком представить Случайность, то такой соперник не преследует конкретные цели, и конфликт интересов не наблюдается. Другим примером можно привести многие азартные игры в казино или компьютерные игры с искусственным интеллектом (далее – ИИ). В этих играх Случайность не является игроком. Владельцы казино в игровых автоматах используют случайную стратегию (не всегда, далее будет исследо­ва­но), ИИ в компьютерных играх использует стратегию программиста или же в них вторым игроком считать создателя, а ИИ – стратегией создателя.

Итак, во всех математических играх игроков не менее двух. При описании игры указывается множество игроков $I$ с перечислением всех игроков. При­нимаем, что количество игроков конечно и равно$ i$. Тогда присваиваем каж­дому игроку порядковый номер натуральное значение до $i$. Множество игроков этой игры вы­глядит как $I=\left\{1,…,i\right\}$.

Ответ на первый вопрос был дан. Теперь предстоит исследовать, кто мо­жет представлять каждого игрока. Рассматривая некооперативную теорию игр, имеем множество сторон с индивидуальными конфликтующими интересами. Если представить кооперативную теорию игр в некооперативной форме, то получим игрока, его стратегию как предлагаемое распределение и противо­борствующую ему коалицию, стратегией которой является согласие или отказ. Для простоты определения имеем право отождествлять игрока и сторону. Тогда получаем, что наибольшее значение имеют коалиции игроков, пре­следующих одну цель, имеющих в них общий выигрыш. Дальнейшее его рас­пределение рассматривает кооперативная теория игр.

Игрой мы называем взаимодействие сторон на почве конфликта интересов, процесс разрешения этого конфликта математическим способом. Под словом «математический» мы понимаем рациональное разрешение конфликта, то есть наименее затратный и наиболее выигрышный одновременно. Тогда появля­ются конфликтные ситуации на основе выбора уже самого игрока. Возникает вопрос: какой результат окажется более предпочтительным? При анализе такого вопроса у игрока возникает необходимость сопоставления различных ситуаций (далее их назовем игровыми), возникающих на основе этого выбора.

Выбираемую модель поведения мы называем игровой стратегией. Для одно­го игрока стратегия будет индивидуальной, для коалиции – общей. В общей стратегии учитывается только внешнее действие, а влияние участников коалиции друг на друга для рассмотрения игровой ситуации не имеет значения (если принимаем, что участники коалиции действуют сообща, а личные интересы отсутствуют).

Когда определено множество игроков, каждому из них предлагается собственное множество стратегий S. Для i-го игрока множество стратегий $S\_{i}=\left\{s\_{i}^{1},…\right\}$ определяется перечислением всех стратегий. Тогда множество стратегий всех игроков формирует множество стратегий данной игры, то есть $S=\left\{S\_{1},…,S\_{i}\right\}$. Фактически в это множество могут входить самые различные поведения, их разнообразие ограничено лишь эмпирически. Но при рассмотрении для удобства учитываются лишь те стратегии, которые интересны аналитику (если прочие упрощаются до подобия, в противном случае существенные стратегии вносят вклад в формирование ситуаций и влияют на исход игры).

Однако сами по себе стратегии несут лишь информацию о поведении игрока. При анализе стратегия без выливающихся в суть игры последствий не несет никакого смысла. Тогда возникает понятие выигрыша. Под выигрышем понимается выгода или невыгода выбора той или иной стратегии с учетом стратегий других игроков. При выборе данной стратегии учитывается лишь гипотетическое поведение игроков. Тогда мы понимаем суть полезности стратегии.

Под полезностью данной стратегии подразумевается функция $u\_{i}\left(s\_{i}^{\*}\right)$, важным аспектом является принадлежность данной функции полезности к конкретному игроку i. Полезность каждого выбора субъективна.

Однако математическая наука нуждается в объективности операций, возникает необходимость рационального представления игры с точки зрения «независимого наблюдателя». Прежде чем формализовать выигрыш как функцию, необходимо определить игру и игровую ситуацию из имеющегося набора данных.

Итак, пускай на определенном этапе игры игрокам предстоит выбрать стратегию. То есть каждый игрок $i\in I$ выбирает стратегию $s\_{i}\in S\_{i}$. Тогда образуется вектор выбранных стратегий всех игроков $s=\left(s\_{1},…,s\_{i}\right)$. Такой вектор называется игровой ситуацией. Для удобства представления все стратегии, принадлежащие определенной игровой ситуации, обозначаются как s, а если стратегия $i$-го игрока не принадлежит этой игровой ситуации, множество определяется как $s\_{-i}$.

После определения игровой ситуации появляется возможность определить выигрыш. Выигрыш $i$-го игрока определяется функцией $u\_{i}\left(s\right)$, то есть индивидуальный выигрыш зависит от стратегий всех игроков, от конкретной игровой ситуации.

Теперь мы имеем полное право дать определение некооперативной игре. Такая игра представляет собой конфликт, для разрешения которого игроки используют стратегии, выбирая их независимо, исходя исключительно из собственных интересов. Если рассматривать некооперативную игру как одну игровую ситуацию, то получаем игру в нормальной форме, если же таких ситуаций несколько, получаем игру в развернутой форме.

Некооперативная игра в нормальной форме: $Г=\left〈I,\left\{S\_{i}\right\}\_{i\in I},\left\{u\_{i}\right\}\_{i\in I}\right〉$. Фактически игрой в развернутой форме будет называться последовательность взаимозависимых игр в нормальной форме. Для удобства исследования мы рассматриваем некооперативную игру в нормальной форме, развернутая форма использоваться будет в определенных случаях для описания определенных понятий и свойств игры.

### 2.Стратегии. Доминирование.

*Названия игр, которые даются в пример здесь и в последующих разделах, являются общепринятыми и традиционными.*

При выборе игроком той или иной стратегии неизбежно возникает вопрос: «Как определить ожидаемую полезность?». Полезность, как отмечалось ранее, субъективна, выигрыш объективен. Для разрешения этого вопроса необходимо иметь представление об всех возможных игровых ситуациях.

Очевидно, что при розыгрыше применение разных стратегий будет давать разные результаты. В то же время, стратегии, дающие одинаковые результаты, можно отождествлять. Стратегии, дающие больший выигрыш при любых стратегиях оппонентов, то есть для любой игровой ситуации, называются доминирующими. Стратегии, дающие всегда меньший выигрыш, либо по отношению к доминирующей стратегии, называются доминируемыми.

Различается сильное и слабое доминирование. Пусть $s\_{i}^{\*}\in S\_{i}$ и $s\_{i}^{'}\in S\_{i}$, тогда $∀s\_{-i}\in S\_{-i}$ $s\_{i}^{\*}$ слабо доминирует $s'\_{i}$, если $u\_{i}\left(s\_{i}^{\*},s\_{-i}\right)\geq u\_{i}\left(s'\_{i},s\_{-i}\right)$ или строго доминирует, если $u\_{i}\left(s\_{i}^{\*},s\_{-i}\right)>u\_{i}\left(s'\_{i},s\_{-i}\right)$. За множество недоминируемых стратегий i-го игрока принимаем $D\_{i}$, а за множество доминирующих стратегий – $D\_{i}\left(u\_{i}\right)$.

Постулат рациональности утверждает, что игроки действуют так, чтоб не использовать доминируемые стратегии. Одной из концепций решения некооперативных игр является так называемое редуцирование. Здесь подразумевается исключение доминируемых стратегий по следующему принципу: в начале из всех стратегий исключаются доминируемые, в результате чего образуется уже новое множество стратегий, среди которых уже другие, бывшие ранее доминантными, оказываются слабее; в результате неоднократного повторения редукции остаются доминирующие стратегии, что позволяет игроку действовать наиболее успешно.

Важно заметить, что редуцирование не является обязательным элементом решения игры. Такого рода упрощения используются для поиска выигрышных стратегий, и в идеальной системе игроки предпочтительнее используют его, но игроки преследуют различные цели, иногда проигрыш в одной игровой ситуации оборачивается победой во всей игре.

Рассмотрим классическую игру «Камень-ножницы-бумага». В этой игре $I=\left\{1,2\right\}$ и $S=\left\{К,Н,Б\right\}$. Пускай выигрыш составляет 1, проигрыш -1, а ничья дает выигрыш, равный 0. Игры с двумя игроками называются биматричными, так как их удобно представлять в виде двух матриц или таблицей.

Таблица №1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | К | Н | Б |
| К | (0,0) | (1,-1) | (-1,1) |
| Н | (-1,1) | (0,0) | (1,-1) |
| Б | (1,-1) | (-1,0) | (0,0) |

Из таблицы видно, что у игроков отсутствуют строго доминируемые стратегии, поскольку заранее неизвестно, какую стратегию выберет противник. Концепция решения подобных игр (игры с нулевой суммой) будет рассмотрена в следующем разделе.

Другим примером является знаменитая «Дилемма заключенного». Двое преступников, арестованных за совершение схожих преступлений, на допросе становятся перед выбором: свидетельствовать против другого или молчать. Допрос в обоих случаях проводится независимо, преступники не могут контактировать друг с другом. Если оба преступника будут молчать, каждый из них получит по полгода тюрьмы. Если один будет молчать, а другой свидетельствовать против него, то первый получает 10 лет, а второй освобождается. Если же оба будут свидетельствовать друг против друга, то оба получают по два года.

Получаем игру с $I=\left\{А,Б\right\}$, $S=\left\{Молчать, Говорить\right\}$. Представим таблицу выигрышей игроков А и Б (строки – стратегии А, столбцы – стратегии Б).

Таблица №2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Молчать | Говорить |
| Молчать | (-0,5;-0,5) | (-10;0) |
| Говорить | (0;-10) | (-2;-2) |

 На первый взгляд, кроме того, многие исследования доказывают, что игроки склонны выбирать стратегию «Молчать». Игра симметрична, так что проведем исследование одной стратегии «Молчать» и одной стратегии «Говорить». Для стратегии «Молчать»:$-0,5+\left(-10\right)=-10,5$; для стратегии «Говорить»: $0+\left(-2\right)=-2$. Результат оказывается удивительным: строго доминирует стратегия «Говорить», поскольку $-2>-10,5$. Выходит, что ожидание не сходится с действительностью – выгоднее оказывается свидетельствовать против (если бы кооперация была разрешена, очевидно, что игроки бы выбирали стратегию молчания).

Исследования показывают, что люди при попадании в подобную ситуацию склонны руководствоваться не рациональной стороной конфликта игры, а ее моральной частью. Тем не менее, в отношении чувств теория игр жестока, и многие выгодные решения оказываются неприемлемы в обществе, но наше исследование занимается математической стороной вопроса, поэтому нам придется закрывать глаза на подобные случаи и рассматривать их беспристрастно.

«Дилемма заключенного» стала крайне важной практически игровой моделью. Результат рассуждений игроков – оба принимают решение свидетельствовать друг против друга и получают 2 года тюрьмы. Во многих странах этот феномен стал причиной запрета соглашения о признании вины. Запрет такого соглашения свидетельствует о практическом значении теории игр. Тем не менее, этот вид сделки используется до сих пор в США, Англии и Уэльсе, Украине, Франции, Индии, Казахстане, Италии, Эстонии, Израиле, Грузии, Молдове.

### 3.Игровые равновесия.

При анализе той или иной игровой ситуации главным возникающим вопросом является дальнейшее течение игры, как конфликт будет разрешен. Концепцией решения называется формальное правило, предсказывающее исход данной игры. Фактически используемая концепция решения нуждается исключительно в условиях игры и ее правилах; поведение игроков, выбор ими конкретной стратегии (множества стратегий) предсказывается концепцией при данных допущениях заранее. Кроме того, концепции могут иметь различные решения, вследствие чего для получения более строгого результата, условия рафинируются, таким образом редуцируются маловероятные решения.

Различают равновесные и неравновесные концепции решения. Неравновесные концепции, в отличие от равновесных, не требуют от игроков обоснованной веры в поведения противников. Рассмотрим равновесные концепции решения.

1)Равновесие в доминирующих стратегиях.

Пускай $D\_{i}(u\_{i})$ – множество всех доминирующих стратегий игрока $i\in I$, тогда если $∀s\_{i}\in s:s\_{i}\in D\_{i}\left(u\_{i}\right)∀i\in I$, то s – равновесие в доминирующих стратегиях.

В игре «Дилемма заключенного» стратегии «Говорить» строго доминируют стратегии «Молчать». Тогда равновесие в смешанных стратегиях будет выглядеть: $s=\left\{Говорить, Говорить\right\}$.

Классической игровой ситуацией является аукцион. В этой игре игроков может быть бесконечно много, для определенности, пусть их будет n. Стратегический набор неограничен: игрок имеет право назвать любую цену и заплатить ее. Выделяют аукционы первой и второй цены. Рассмотрим аукцион первой цены, где выигрывает назвавший наибольшую цену, после чего он эту цену обязуется заплатить.

Имеем: $Г=\left〈I=\left\{1,…,n\right\},\left\{S\_{i}\right\}\_{i\in I},\left\{u\_{i}\right\}\_{i\in I}\right〉$. Пускай для i-го игрока ценность розыгрыша будет равна p, а для j-го q, для определенности $q>p$. Рассмотрим ход мыслей каждого из игроков. Если i-й игрок называет цену $k<p$, то он серьезно рискует проиграть (пусть в случае проигрыша игрок получает $u\_{i}=k-p$, в случае выигрыша $u\_{i}=p-k$), чем меньше k, тем меньше вероятность победы. Ситуация зеркальна в случае выбора цены, превышающей индивидуальную полезность (для выигрыша $u\_{i}=p-l, где l>p$). Тогда стратегия $s\_{i}=p$ доминирует прочие, и в случае выигрыша игрок i получает 0, и в случае проигрыша также 0. Для j-го игрока рассуждения аналогичны, в результате получаем игровую ситуацию $s=\left\{…,s\_{i}=p,s\_{j}=q,…\right\}$ на конец игры. Тогда s – равновесие в доминирующих стратегиях, в котором аукцион разыгрывает j.

Рассмотрим аукцион второй цены (побеждает игрок, назвавший наибольшую цену, при этом платит не свою, а игрока, назвавшего вторую по величине цену). Будет ли отличаться решение? Теперь для игрока j, точно знающего, что $q>p\_{i}∀i\in I\_{-j}$, не имеет значения, какую цену называть – q или любое значение больше (эта цена не будет выплачена им), но меньше q он называть не будет, т.к. рискует проиграть. Пускай игрок i называет вторую цену. Может ли он выиграть? Да, если назовет наибольшую цену, как минимум, большую, чем q, но тогда ему придется выплатить цену j, который не будет называть цены, меньшей личной ценности q. Тогда, по определению, игрок i получает выигрыш $u\_{i}=p-q<0$. Разумеется, такой исход игрока не устроит, поэтому он будет склонен выбирать стратегию $s\_{i}=p$. Для игрока j при данных условиях все стратегии $s\_{j}=k\geq q\in D\_{j}$. Получаем соответствующую игровую ситуацию, которая также является равновесием в доминирующих стратегиях.

2)Равновесие по Нэшу.

Ключевой концепцией решения в некооперативной теории игр является равновесие по Нэшу. В 1949 году в 21 год американский ученый Джон Форбс Нэш написал диссертацию о некооперативных играх, спустя 45 лет получив за нее Нобелевскую премию по экономике. В 1950-53 гг. он опубликовал четыре революционные работы в области игр с ненулевой суммой (игры с нулевой суммой будут рассмотрены отдельно), обнаружив существование «некооперативного равновесия», впоследствии названного в его честь.

Пусть $Г=\left〈I,\left\{S\_{i}\right\}\_{i\in I},\left\{u\_{i}\right\}\_{i\in I}\right〉$ – игра в нормальной форме. Тогда равновесием Нэша называется игровая ситуация $s^{\*}$, где $∀i ∀s\_{i}\in S\_{i}: u\_{i}\left(s\_{i}^{\*},s\_{-i}^{\*}\right)\geq u\_{i}\left(s\_{i},s\_{-i}^{\*}\right)$. Нэш доказал, что в любой некооперативной игре существует хотя бы одно такое равновесие, если разрешить смешанные стратегии (следующий пункт), хотя фактически мы имеем право утверждать, что смешанные стратегии мало чем отличаются от чистых и их запрет лишь является рафинированием концепции.

Рассмотрим применение равновесия по Нэшу на примере новой игры, носящей в обиходе название «Гарвард». Особенностью этой игровой модели является необходимость одного игрока верить в рациональность других игроков. Пускай имеется $I=\left\{1,…,n\right\}$ и соответствующие стратегические множества $S$, причем $S\_{i ∀i\in I}=\left\{1,2,…,100\right\}$. Каждый игрок выбирает натуральное число от 1 до 100, после чего победителем (их может быть несколько) объявляется игрок, назвавший число, наиболее близкое к среднему пополам, т.е. из игроков i и k побеждает i: $\left|s\_{i}-\frac{s\_{1}+s\_{2}+…+s\_{n}}{2n}\right|\leq \left|s\_{k}-\frac{s\_{1}+s\_{2}+…+s\_{n}}{2n}\right|$. Соответственно, доминирование той или иной стратегии игрока i целиком зависит от ситуации $s\_{-i}$. Для дальнейшего анализа воспользуемся постулатом полной рациональности игроков.

Приведем рассуждения i-го игрока. Если все игроки назовут максимально возможное число, т.е. 100, тогда среднее пополам будет равняться 50, следовательно называть любое число, большее 50 нерационально. Но каждый из игроков рассуждает точно также, значит ни один из них не станет называть число большее 50. Тогда среднее пополам снижается до 25, после чего любая стратегия, включающая число, большее 25 исключается. При дальнейших рассуждениях будут исключаться все меньшие числа (12,5 – наименьшее натуральное 12, после 6, затем 3, наконец, 1). В результате рассуждения сужают круг возможных стратегий до меньших 1, тогда среднее пополам 0,5 – наименьшее целое 0, но по условию разрешены только натуральные числа, соответственно, множество рациональных стратегий $S\_{i∀i\in I}^{\*}=\left\{1\right\}$.

Приведенные выше рассуждения наглядно демонстрируют редуцирование, исключение новых доминируемых стратегий. Равновесием Нэша в игре является игровая ситуация $s^{\*}=\left\{1,…,1\right\}$. Тогда среднее пополам $\frac{1+…+1}{2n}=0,5$. В результате выигрывают все игроки.

Игра была названа в честь Гарвардского университета, поскольку там был представлен один из наименьших результатов среднего пополам (7-8), впоследствии А.Савватеев утверждал, что из известных ему экспериментов наименьший результат был около 4. В классической теории игр создание подобных игровых ситуаций нерационально (ситуации создаются игроками), однако подобное поведение будет рассмотрено в следующем разделе. На данном этапе исследования стоит остановиться на закреплении постулата полной рациональности и запрете его нарушения.

3)Парето-эффективность.

Отдельно стоит рассмотреть следующую экономическую ситуацию. Главной проблемой экономики является вопрос распределения ограниченных ресурсов при неограниченном возрастании потребностей. Оптимальным по Парето состоянием рынка будет считаться такая ситуация, в которой каждый из субъектов экономической деятельности не может улучшить свое положение, не ухудшив при этом положение хотя бы одного из прочих. Первые две теоремы благосостояния утверждают, что Парето-оптимальное равновесие рынка достижимо.

Равновесие по Нэшу не обязано быть Парето-эффективным, из-за чего нередко возникает путаница между понятиями. Однако, оптимальность по Парето является важной составляющей справедливого распределения ресурсов.

Более строгое, чем равновесие по Нэшу, тем не менее всегда Парето-эффективное – сильное равновесие. Такое равновесие вследствие рафинирования существует не всегда, но для последующего анализа нам необходимо иметь о нем достаточное представление.

Пусть имеется игра в нормальной форме $Г=\left〈I,\left\{S\_{i}\right\}\_{i\in I},\left\{u\_{i}\right\}\_{i\in I}\right〉$, тогда сильным равновесием Нэша будет называться такая игровая ситуация $s^{'}$, в которой $∀K⊆I$ и $∀s\in S$ $∃i\in K: u\_{i}\left(s'\right)>u\_{i}\left(s\_{-K}^{'},s\_{K}\right)$.

Главной особенностью сильного равновесия по Нэшу является устойчивость не только к индивидуальным отклонениям игроков, но и к коллективным отклонениям.

4)Равновесие, совершенное по подыграм.

Давая определение игры в развернутой форме, мы упомянули, что она представляет собой последовательность взаимосвязанных нормальных игр. Но в некоторых случаях, при анализе развернутой игры, недостаточно и нецелесообразно рассматривать только одну стадию (если это не является самоцелью исследования). В таком случае игра рассматривается в целокупности нормальных игр, и, следовательно, равновесия необходимо определять так же.

Классически развернутую игру принято представлять в виде дерева. Имеется игра в развернутой форме с игроками А и В, имеющих, соответственно, стратегические множества SA и SB, состоящих из двух стратегий каждое. Таким образом, каждое сочетание этих стратегий образует четыре игровые ситуации $s\_{1}=\left\{s\_{A}^{1};s\_{B}^{1}\right\}$, $s\_{2}=\left\{s\_{A}^{1};s\_{B}^{2}\right\}$, $s\_{3}=\left\{s\_{A}^{2};s\_{B}^{1}\right\}$, $s\_{4}=\left\{s\_{A}^{2};s\_{B}^{2}\right\}$. Каждая игровая ситуация дает уникальные выигрыши, в противном случае, мы считаем эти ситуации неразличимыми.

Схема №1

$$s\_{A}^{1}$$

$$s\_{A}^{2}$$

$$s\_{B}^{2}$$

$$s\_{B}^{1}$$

$$ s\_{B}^{2}$$

$$s\_{B}^{1}$$

В

В

s1

s2

s3

s4

А

Совершенным на подыграх равновесием Нэша называется такой набор стратегий игроков А и В, что каждая игровая ситуация, образованная этим набором, является равновесием Нэша.

Определение распадается на несколько частных случаев:

* Стратегия $s\_{A}^{1}$ строго доминирует стратегию $s\_{A}^{2}$, когда стратегия $s\_{B}^{1}$ доминирует стратегию $s\_{B}^{2}$, что равносильно наличию доминирующих стратегий у каждого из игроков. Тогда существует единственное равновесие по Нэшу, т.е. $s\_{1}$.
* Стратегия $s\_{A}^{1}$ строго доминирует $s\_{A}^{2}$, когда ни одна из стратегий $s\_{B}^{1}$ и $s\_{B}^{2}$ не доминирует строго другую, что равносильно наличию строго доминирующей стратегии у одного из игроков и отсутствию доминирующих стратегий у другого, либо если доминирование слабое. В этом случае существуют два равновесия по Нэшу, т.е. $s\_{1}$ и $s\_{2}$.
* Оба игрока не имеют доминирующих стратегий. Тогда в этой игре равновесий по Нэшу не существует.

Равновесие, совершенное на подыграх, позволяет игрокам защититься от недостоверных угроз противника. Наиболее часто при поиске равновесий используется метод обратной индукции, при котором сначала исследуются конечные игровые ситуации, на основе чего игроки и делают выбор.

5)Смешанное равновесие. Игры с нулевой суммой.

Важно также рассмотреть так называемые, антагонистические игры, или игры с нулевой суммой. Название говорящее, таким образом, получаем, что в таких играх сумма выигрышей игроков равна нулю или выигрыши равны по модулю и противоположны по знаку. Выбор стратегий в таких играх аналитически устанавливается без особых трудностей. В играх с нулевой суммой рассматриваем двух игроков.

Имеем игру $Г=\left〈\left\{i;j\right\},\left\{S\_{i};S\_{j}\right\},\left\{u\_{i},u\_{j}\right\}\right〉$, где для каждой игровой ситуации s выполняется равенство $u\_{i}\left(s\right)=-u\_{j}\left(s\right)$. Очевидно, что при попытке максимизировать свой выигрыш, выигрыш соперника будет убывать с той же скоростью. Таким образом, другой игрок будет склонен изменить свою стратегию для увеличения своего выигрыша. Заметим, что это противоречит определению равновесия по Нэшу, т.е. такой ситуации, в которой игроки будут довольны своими стратегиями одновременно существовать не должно. Действительно, сколь бы малым не был выигрыш одного игрока, если он больше нуля, соперник проигрывает на столько же. Однако, если стратегия одного из игроков дает выигрыш, равный нулю, то выигрыш второго игрока будет так же нулевым. В этой ситуации мы можем наблюдать равновесие по Нэшу.

Однако проблема возникает при попытке изобразить подобную ситуацию, в которой выигрыш обоих игроков нулевой, соответственно, никто ничего не выигрывает и не проигрывает. Тогда вводится понятие смешанной стратегии, т.е. стратегии, с определенной частотой представляющей каждую из чистых. Пускай чистые стратегии $s^{1},…,s^{n}$ имеют соответственно вероятности появления $α,…,β$. Тогда $α+…+β=1$.

Рассмотрим игру с нулевой суммой, например, «Прятки». Эта игра является классическим примером для двух игроков, имеющих равнопротивоположные выигрыши. Приведем игру в нормальной форме.

$Г=\left〈I=\left\{А,Б\right\},\left\{S\_{А},S\_{Б}\right\},\left\{u\_{А},u\_{Б}\right\}\right〉$*.* Чистого равновесия по Нэшу в этой игре не существует, зато можно найти смешанное равновесие. Для этого необходимо определить все вероятные чистые стратегии. Пусть множество игровых стратегий определяется как $S\_{i\in I}=\left\{1,2\right\}$. Также, для определенности утверждаем, что игрок А – ведущий, соответственно, Б – ведомый. Тогда имеется два места, в каждое из которых может спрятаться А, также Б может его искать в любом из этих мест.

Таким образом, стратегии 1, 2 считаем неразличимыми. Имеем таблицу выигрышей

Таблица №3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
| 1 | (-1,1) | (1,-1) |
| 2 | (1,-1) | (-1,1) |

 Рассмотрим поведение игроков.

Игрок А предполагает, что другой следует той или иной стратегии с определенной вероятностью $ε$. Тогда проводится следующий анализ. Если вероятность $ε$ характеризует место 1, а вероятность $1-ε$ характеризует место 2, то для $ε>1-ε$ игроку А следует выбрать место 2, поскольку игрок В последует туда с наименьшей вероятностью, что увеличивает шансы А на выигрыш. В то же время, игрок В, понимая, что при раскладе вероятностей, зависящих от $ε$, игрок А не пойдет в место 1, следовательно подобная игровая ситуация не будет удовлетворять его потребностям. Тогда игрок В склонен изменить свое предпочтение в пользу стратегии 2, о чем немедленно узнает игрок А.

Из вышесказанного в начале пункта ясно, что равновесной в игре будет ситуация, дающая каждому из игроков выигрыш, равный нулю. Но так как по условию вероятность выбора стратегии $s\_{1}$ равна $ε$, то имеем следующее уравнение относительно $ε$.

$$u\_{B}\left(s\_{A}^{1},s\_{B}^{1}\right)×ε+u\_{B}\left(s\_{A}^{2},s\_{B}^{1}\right)×\left(1-ε\right)=0$$

$$1×ε-1×\left(1-ε\right)=0$$

$$2ε=1$$

$$ε=\frac{1}{2} $$

Отсюда следует, что смешанное равновесие Нэша достигается в единственном случае, где выбор стратегий осуществляется с вероятностью $\frac{1}{2}$ в пользу каждой из них.

Индуктивно получаем, что для двух игроков и произвольного числа мест со случайным выбором вероятностей, равновесным является выбор s, в котором для n стратегий каждая выбирается с вероятностью $\frac{1}{n}$. Любое отклонение будет сопровождаться нарушением равновесия.

Антагонистическая игра в общем виде:

$$Г=\left〈I,\left\{S\_{i}\right\}\_{∀i\in I},\left\{u\_{i}\right\}\_{∀i\in I}\right〉$$

$$\sum\_{i=1}^{n}u\_{i}\left(s\right)=0$$

$$∃s^{\*}: ε=\frac{k}{n}$$

Здесь имеется смешанное равновесие $s^{\*}$, где $k$ – количество ведомых игроков.

6)Эволюционно стабильная стратегия.

При распределении концепций решения от наиболее общих к наиболее рафинированным на последнем месте оказывается так называемая эволюционно стабильная стратегия (далее – ЭСС). ЭСС называется такая стратегия социального поведения, которая не может быть вытеснена никакой другой стратегией, если ее принимают достаточное число представителей популяции.

Рассмотрим ее основные характеристики, а также особенности редуцирования в сравнении с иными концепциями решения. ЭСС, впервые использованная английским биологом Дж. Мейнардом Смитом, характеризует индивидуальное поведение, направленное решение широкого спектра повторяющихся социальных задач.

Ключевой особенностью ЭСС является принцип избирательности. В отличие от равновесия по Нэшу, игроки – индивиды – действуют, не зная заранее поведения оппонентов и не полагаясь на него. Биологическое обоснование концепции основывается на генетической предрасположенности. Социальное обоснование добавляет влияние социальных эффектов. Таким образом, игрок получает множество индивидуальных стратегий, не являющихся реакционными.

ЭСС не должна быть инертной как чистая стратегия. Так, для азартных игр честность и жульничество в чистом виде являются невыгодными стратегиями из-за наличия обманщиков в первом случае, или из-за существования правил игры, формально запрещающих жульничать во втором. Классическая смешанная стратегия является неприменимой в большинстве случаев из-за идеализации равновесной ситуации.

ЭСС больше приближена к реальной жизни и используется в тех областях науки, где применение равновесия Нэша некорректно вследствие его идеализированности (философия, политология, антропология).

Т.к. ЭСС занимает верховное положение в редуцированной последовательности концепций, имеем право утверждать, что каждая ЭСС является равновесием Нэша; вполне очевидно, что обратное утверждение не будет справедливым.

### 4.Приоритет стратегии. Функция выбора.

При выборе той или иной стратегии различные игроки пользуются различными соображениями, зависящими, в том числе, от используемой концепции решения. Каждая стратегия является ответом на стратегию каждого из оппонентов. Однако в реальной теории игр не обязательно использование доминирующих стратегий или просто стратегий, ожидаемо дающих большую полезность. Интерес игрока может заключаться в получении выгоды на ином этапе игры даже в случае, когда в данный момент он объективно проигрывает. Функция выигрыша, тем не менее, субъективна.

Мы не отклоняем постулат рациональности действий игроков. Дело в том, что в определенной игровой ситуации может создаваться впечатление невыгодности действий игрока в то время, как он извлекает большую полезность в дальнейших действиях. Например, во время войны иногда выгода, получаемая от победы в битве намного меньше, чем людские потери, что создает отрицательный выигрыш. Таким образом, некоторые военачальники склонны продолжать сражение, иные идут на отступление. В обоих случаях окончательный исход целиком зависит от мастерства руководства, стратегической изобретательности, действий противника. В этом примере мы можем рассматривать игру двояко: как битву или же как войну во всем ее масштабе. В первом случае чаще дает преимущество использование подыгрового доминирования, а во втором сложность ситуации отдает предпочтение ЭСС.

Тем не менее, математическое моделирование не позволяет целиком рассматривать такие сложные социальные процессы, отчего разбиение на более мелкие игры с незначительным элементом идеализации не создает существенного ущерба целостному восприятию.

Существуют различные методы принятия решения. Математическое ожидание, теория ожидаемой полезности основываются на определении ожидаемой полезности, т.е. выигрыша. Иными словами, имеется определенное правило нахождения выигрышности множества игровых ситуаций. Для теории ожидаемой полезности это правило представляется суммой:

$$U=\sum\_{i=1}^{n}p\_{i}U(s\_{i}): \sum\_{i=1}^{n}p\_{i}=1$$

Заметим, что здесь определяется полезность стратегии $s\_{i}$ для каждого случая возникновения различных игровых ситуаций с некоторыми вероятностями $p$. Формула позволяет найти наивыгоднейшее решение для всего множества собственных стратегий для всего множества вероятных игровых ситуаций. Тогда предпочтительной стратегией будет такая $s'\_{i}$, что:

$$s'\_{i}=Argmax(U)$$

Рассмотрим иной, более близкий к реальному поведения человека, метод. Теория перспектив – модель принятия решения, основанная на сопоставлении рисков известных вероятностных альтернатив. Математически формулировка выглядит сходно с формулой ожидаемой полезности.

$$V=\sum\_{i=1}^{N}π\left(p\_{i}\right)u(x\_{i})$$

Здесь функция $π(p\_{i})$ характеризуется нелинейностью вероятностных отношений. Так большие вероятности не кажутся слишком большими, а маленькие не кажутся слишком маленькими. Например, $π(0.99)\ll 0.99$ или $π(0.01)\gg 0.01$, в то время как $π(0.4)≃π(0.5)$. Тем не менее, теория утверждает, что игроки не имеют оснований безосновательно завышать или занижать реальную вероятность: $π\left(0\right)=0$ и $π\left(1\right)=1$.

Для различных методов принятия решения, соответственно, будут различаться и правила, т.е. функции. Тем не менее, как утверждалось ранее, игроки не всегда (т.к. не обязаны) склонны использовать даже стратегии недоминируемые; в реальной теории игр выбор может пасть и вовсе на случайную стратегию.

**Определение.** Каждый игрок принимает решение, т.е. выбирает ту или иную стратегию в соответствии с особой функциональной зависимостью для каждой неполной игровой ситуации. В общем виде $∀i\in I ∀s\_{i}\in S\_{i}:i\left(s\_{-i}\right)=s\_{i}$.

Из определения аналогично следуют $j\left(s\_{-j}\right)=s\_{j}$ или $i\left(s\_{-ij}\right)=s\_{i}$ и др.

Такую функцию мы называем функцией выбора игрока. Функция эта абсолютно субъективна. Во многом выбор игрока зависит от характера игры и его оппонентов. Также большое значение оказывают существующие равновесия Нэша, подыгровые равновесия, вероятностного набора и поведения других игроков. Заметим, что во всех рассмотренных прежде играх ни один из игроков не полагался на другого, принимая в расчет только холодную рациональность и логику. В то же время, в повторяющихся играх, т.е. играх, в течение которых у игроков имеется возможность путем наблюдения, анализа устанавливать принцип стратегического выбора противника. Все эти факторы оказывают существенное влияние на функцию выбора, ее изменчивость, а равно, на исход игры в целом.

### 5.Информационная база игрока.

Прежде чем игрок сталкивается проблемой выбора, возникает сама конфликтная ситуация. Игрок получает сведения о правилах игры, его оппонентах. Далее возникают стратегические множества у всех игроков. В разных играх после этого возникают различные отношения между игроками. По принципу имеющейся у каждого из игроков начальной информации игры разделяются на игры с полной и неполной информацией.

Тогда в играх с полной информацией все игроки владеют полной информационной базой об остальных игроках, их стратегических множествах, вероятностных наборах и, в случае игры последовательной (стратегии воплощаются одна за другой, не одновременно), об уже сделанных ходах.

Важно прояснить отличие игрового хода от стратегии во избежание неоднозначностей. Ход – базовое единичное действие; стратегия же есть цельная модель игрового поведения, включающая в себя принципы разрешения конфликта.

Таким образом, к играм с полной информацией относятся, например, шахматы, а к играм с неполной информацией – покер. Все рассмотренные нами ранее игры имеют неполную информационную базу. Таким образом, использование постулата рационального поведения игроков обязательно, более того, иначе игроки не могут ориентироваться в игровых ситуациях с возможностью максимизации выигрыша.

Понятно, что модели поведения игроков в играх с полной и неполной информацией будут существенно отличаться, как и принципы этого поведения, отдаваемого приоритета. Иначе говоря, в играх с неполной информацией задействована функция $i\left(∅\right)=i(s\_{-i})$, где в правой части уравнения представлена рациональная игровая ситуация, возникновения которой игрок i ожидает. В играх с полной информацией отсутствует левая часть, т.е. неполная игровая ситуация задана достоверно.

Такие концепции решения, как равновесие по Нэшу, хорошо описывают поведение игрока: а)желающего победить; б)в ситуации, когда все прочие игроки также желают выиграть. В реальных играх эти условия являются допущениями, поскольку зачастую цельная игра разбивается на, пусть и связанные, но подыгры. В этом случае это разбиение не дает необходимой связи, позволяющей рассмотреть поведение игрока во всем множестве условий.

Кроме того, по уровню информационной базы игры можно разделить на честные и нечестные. Заметим, что «честность» не есть «честность стратегии». В честных играх игроки могут жульничать, как вариант выигрышной чистой или смешанной стратегии. Под честной игрой здесь понимается неопределенная итоговая игровая ситуация, равно как неопределенные выигрыши игроков, равно как непредрешимость соотношения «победитель:проигравший».

Нечестные игры – классический пример олимпиадных задач по теории игр для школьников, где необходимо найти игрока, выигрывающего всегда, или найти заведомо выигрышную стратегию, иначе говоря, принадлежащую к множеству $D$. Зачастую, условия таких задач содержат вопрос: «кто выиграет при правильной игре?». В честных играх такой вопрос появиться не может.

В основной части исследования внимание будет сосредоточено на честных играх как представляющих наибольший интерес и непредсказуемость результата.

## Раздел II. ИГРОВОЙ АНАЛИЗ.

Художественное произведение всегда развивается по стандартному плану. Действие начинается в завязке, затем конфликт обостряется и происходит основное действие, за ним следует развязка. Если в художественном произведении большая часть сюжета принадлежит второй, основной части, то при анализе игры необходимо понимать, что время протекания процессов имеет значение лишь тогда, когда оно влияет на решения, принимаемые игроками. Во всех прочих случаях при анализе время безразлично. Таким образом, мы можем считать, что каждый из игроков воплощает в жизнь свою стратегию мгновенно.

Следующий раздел рассматривает игру, разбитую на три сменяющие друг друга части: завязку игры, воплощение стратегии, развязку игры.

### 1.Завязка игры.

Завязка игры – ключевой ее этап. Здесь залагается основа будущего конфликта. Во время завязки игроки получают всю основную информацию, на основе которой будет определяться функция выбора каждого игрока. Эта информация складывается из информации, полученной в результате прямого воздействия правил игры, а также их косвенного воздействия. Под косвенным воздействием подразумеваются личные выводы конкретного игрока на основе лично проведенного анализа.

Правила игры сообщают игрокам основные ее характеристики. Игроки узнают все имеющиеся дозволения и ограничения их вероятных действий, личное положение дел на начало игры, т.е. ограничения или преимущества, характерные исключительно для них; узнают правила определения победителя. На первый взгляд может показаться, что стратегическое множество $S\_{i}$ каждый игрок $i$ определяет самостоятельно. Однако игровые правила уже диктуют эти множества, поскольку содержат их изначально, таким образом, действия игрока ограничиваются непосредственным выбором в пользу той или иной стратегии, заранее заложенной в конкретном стратегическом множестве.

Эта информация имеется у любых игроков в любой игре. Далее обстоятельства зависят от характеристик игры. Информационная база игры сообщает или не сообщает игроку то, как обстоят дела у оппонентов. Один из игроков изначально может оказаться в более выигрышном положении (например, обстоятельства дел в двух государствах на начало войны; заметим также, что для нечестных игр это происходит всегда для кого-либо из игроков).

Рассмотрим игры с неполной информацией. Также в контексте вопроса сюда можно отнести игры с недостоверной информацией. Например, сама игра может давать ложную или запутанную информацию, или правила игры могут не запрещать игрокам вводить других в заблуждение. В другой ситуации мы имеем дело с обычной игрой с неполной информацией, в которой игроки не знают ни начального положения дел соперников, ни их вероятные стратегические множества. Однако игрок все же имеет стартовую информацию: правила игры. Уже отсюда он может предположить, как и в какой ситуации будут действовать игроки.

Однако здесь возникает новая проблема. Шахматы являются игрой с полной информацией, однако просчитать количество всех возможных ходов (а уж тем более, всех стратегий, представляющих собой их цепочки) практически невозможно. Однако шахматисты, ориентируясь на правила игры, почти всегда способны угадать последующие ходы оппонента, выстраивая, таким образом, свою стратегию. В шахматах на начало игры возможно 16 пешечных ходов и 4 конных, суммарно 20. Из них на основе статистической успешности разыгранных партий, теоретических разработок «правильными» считаются только семь. Гарри Каспаров в 1997 году во время игры с компьютером Deep Blue начал партию с дебюта Мизеса, относящегося к «неправильным» началам. Шахматист предположил, что компьютер будет хуже играть в позиции, не предусмотренной дебютной библиотекой. Тем не менее, игра кончилась вничью.

В зависимости от полноты информационной базы, так или иначе, игроки узнают единое до конца игры множество $\left\{S\_{n}\right\}\_{∀n\in I}$. Его узнают все игроки – для всех оно одинаково на начальном этапе, когда ни один из игроков не применяет взаимное редуцирование. Таким образом создаются все возможные стратегии: как чистые, так и смешанные, а отсюда следует, что сразу вместе с этим формируются всевозможные произведения $s\_{1}^{\*}×…×s\_{i}^{\*}=s^{\*}$, т.е. игровые ситуации.

Далее, когда каждый игрок имеет представление о всех возможных начальных условиях, начинается индивидуально-групповой анализ. Эта часть завязки уже отличается от предыдущих тем, что большую роль начинают играть индивидуальные качества, мотивы и амбиции игроков. Это серьезно сказывается на дальнейшем ходе игры, поскольку определенная роль налагается также на способность игроков рассуждать. Постулат рациональности не прекращает свое действие, разве что, начинают влиять на ход игры такие факторы как альтруизм (или строгий эгоизм), случайные ошибки, дальновидные ориентации (пускай, из $n>2$ игроков, например, двое продолжат в будущем играть в какую-либо другую игру, но настоящая игра оказывает важное влияние на начальное положение игроков в будущем – в некую метаигру; получается, это окажет влияние на соответствующие их игровые стратегии, т.е. на всю игровую ситуацию, что сказывается и на остальных игроках). Соответственно, это поведение будет зависеть от того, относится ли эта игра к повторяющимся или является частью системы игр, например, предполагающей постепенное редуцирование множества игроков, или, напротив, является самой обычной одиночной игрой.

Во всех случаях индивидуально-групповой анализ будет протекать по-разному. Индивидуальный будет ориентирован на начальные сведения о игре, имеющиеся у игроков, а групповая составляющая анализа будет рассматривать наиболее вероятно существующие игровые ситуации.

Из каждой игровой ситуации вытекает множество всех $u\_{i}(s)$, и разные игроки в различной степени проинформированы о множестве выигрышей. На основании имеющейся информации каждый игрок проводит однозначное сопоставление $s'\_{i}\in s'\rightarrow u\_{i}(s^{'})$ для каждого из игроков. После этого, получив совокупность соответствий, игроки делают выбор в пользу той или иной концепции решения, на основе которой они будут строить дальнейшую игру, предполагать существование той или иной гипотетической игровой ситуации, после чего, делать собственный выбор. Таким образом, из концепции решения $F\rightarrow s'\_{-i}$.

Важно отметить, что на основании каких-либо логических соображений игрок составляет отображение гипотетической неполной игровой ситуации. Игрок учитывает психологические или игровые особенности других участников, на основе чего формирует индивидуально рациональное их поведение. Под этими словами понимается индивидуальная обоснованность принятия конкретного решения.

Но, поскольку игроки различные руководствуются различными мотивами, для данной игры при данном множестве игроков возможно существование нескольких концепций решения, применимых к некоторым группам игроков. Пускай из попарно непересекающихся множеств игроков $A,B,…,C$, причем, $A∪B∪…∪C=I$, для каждого из множеств используются концепции решения $F^{A}, F^{B},…,F^{C}$, различные попарно (иначе множества имеют пересечения). Тогда формируются игровые ситуации $s'\_{A}×s'\_{B}×…×s'\_{C}=s'$. И для игрока i формируется общая гипотетическая игровая ситуация $s'\_{-i}$.

Предположения могут быть как верными, так и напротив. В игре с полной информацией однозначно производится сопоставление $s^{'}=s$. Однако, крайне важно отметить, что как одни игроки могут вводить в заблуждение других, так и любой из игроков может ошибиться, – тогда играют роль индивидуальные особенности игроков: одни осознают возможность ошибки, другие сознательно или бессознательно ее отклоняют, хотя эта вероятность, разумеется, не обнуляется от одного лишь предположения игрока.

Итак, формируется $s'\_{-i}$, и тогда игрок $i$ начинает анализировать эту игровую ситуацию с точки зрения собственной выгоды. Из $S\_{i}$ различные стратегии дают различные выигрыши, игрок выбирает концепцию решения для себя. Если у наблюдателя возникнет вопрос: «Какую же стратегию выберет игрок?», то единственным правильным ответом будет: «Ту, которую он выберет». Действительно, выбор концепции решения и, соответственно, стратегии целиком зависит от мотивов и особенностей игрока.

И тогда, руководствуясь теми или иными мотивами, игрок устанавливает соответствие $F\rightarrow i$, после чего из игровой ситуации делается выбор по соответствию $i\left(s'\_{-i}\right)=s\_{i}$. Это соответствие устанавливает каждый из игроков, возможно, одновременно, возможно, что последовательно, однако из множества таких стратегий формируется реальная игровая ситуация $s$. На этом заканчивается первый игровой этап – завязка.

### 2.Воплощение.

На этом этапе игроки воплощают свои стратегии. Их реализация может протекать по-разному в зависимости от воздействия различных факторов.

Одним из ключевых факторов в воплощении является время или иные сторонние ресурсы, которые необходимо затратить на реализацию стратегии. В данном случае итоговый выигрыш будет определяться разностью приобретений и потерь.

Рассмотрим аукцион. Пускай у некоторого игрока $i$ ценность розыгрыша определяется в $p$ у.е., т.е. это та максимальная цена, которую игрок готов заплатить за данный предмет. Рассмотрим ситуацию без иных игроков, однако учтем некоторые дополнительные факторы. Пускай розыгрыш $X$ является, например, предметом роскоши, за который необходимо уплатить налог. Однако, согласно местному законодательству, установлен порог для предметов роскоши (на предметы, чья цена ниже $q$, налог не распространяется, причем цена определяется как цена приобретения); для тех же предметов, чья цена преодолевает этот порог, налог составляет $t$ с каждой тысячи у.е. Так, в случае, когда цена равна в точности $q$, налог составляет в точности $t$ вплоть до цены в $q+999$ и т.д. Оказалось так, что у нашего игрока $p\geq q$. Тогда налог вычитается из его выигрыша. Если игроку удается купить $X$ хотя бы за $p-t$, сделка состоится, и $u\_{i}(p-t)\geq 0$. Для фиксированных $p$ и $q$ разность $p-q=x$. Заметим, что если $x<t$, то сделка производится не более, чем за $p-1$; если $x\geq t$, то сделка производится не более, чем за $p-t$.

Таким образом, рассуждения аналогичны также для любой игры с дополнительными тратами (время, альтернативная стоимость и т.п.)

Отсюда делаем вывод, что воплощение играет важную роль в структуре игры, но эта роль и ее важность скорее проявляется на первом этапе, когда игрок, понимая, что могут появиться дополнительные траты, выбирает, таким образом, более выгодную стратегию (но, возможно, менее выгодную, если окажется, что боязнь была излишней).

С другой стороны, неверно полагать, будто бы игрок не может во время игры на том или ином ходе сменить свою стратегию. Невозможность этого была бы причиной невозможности смешанных стратегий (как подбрасывание монетки). С другой стороны, в игре, которая не предусматривает наличие ходов, т.е. ход всего один, произвольная смена стратегии невозможна и абсурдна. Основные рамки математического исследования устанавливают правила игры, ее условие и индивидуальные ограничения игроков.

Вторым фактором, непосредственно влияющим на все этапы игры, но относимый именно к воплощению, являются индивидуальные особенности игроков (ограничения и дозволенности). Поскольку условием нашего исследования была честность игр, то в играх со вседозволенностью одного из игроков существуют такие игровые ситуации, как равновесие по Нэшу (как некооперативная игра) и ситуация, в которой этот игрок может проиграть (что непосредственно вытекает из определения равновесия по Нэшу).

Кроме прочих условий следует выделить два наиболее сложных при совмещении: 1) постулат рациональности и 2) практическая неизбежность индивидуальных ошибок. Задача исследования состоит в том, чтобы либо исключить один из параметров во избежание противоречий, либо обнаружить возможность их сосуществования. Исключение первого условия приводит к уничтожению самой математической концепции игры, исключение второго ведет к серьезному искажению реальной ситуации, что позволяется в разумных пределах, но в глобальном смысле влечет уничтожение прикладного значения некооперативной теории игр. Из этого следует необходимость соединить эти условия так, чтоб противоречий в этом объединении не было.

Постулат рациональности гласит, что ни один из игроков не будет ухудшать своего положения, т.е. будет использовать доминирующие стратегии. Предполагая существование многоступенчатых игр для некоторых игроков, это утверждение трансформируется в стимул игроков улучшить свое итоговое положение, а его «формула» зависит от прочих игроков, индивидуальных особенностей, правил и пр. Это допущение позволяет игрокам использовать доминируемые стратегии. Следующее допущение связано с завязкой игры. Поскольку в результате предположения каждого игрока по использованию данной концепции решения формируются гипотетические игровые ситуации, то стратегии, казавшиеся доминирующими, могут оказаться доминируемыми в реальной игре. Таким образом, эти условия не обязаны противоречить друг другу, а их сосуществование в честной игре создает более сложные, оттого и более реальные игровые ситуации. Основным условием является четкое следование игроками собственной логике.

Помимо гипотетических затрат, о которых игрок узнает еще в завязке, в играх с несовершенной информационной базой могут существовать иные, да и гипотетические могут быть и не реализованы. Поэтому на этапе воплощения все затраты проявляются в полной мере и наиболее ярко.

В играх с последовательными ходами, например, игроки, ходящие не первыми, имеют преимущество, состоящее в возможности заметить реальные затраты или даже изменить стратегию. Тогда эта ситуация будет относиться к первому игровому этапу, т.е. в динамических играх игровые этапы различных игроков протекают не синхронно, за исключением последнего – развязки.

### 3.Развязка игры.

Для игрока первый этап характеризуется наибольшей напряженностью интеллектуальной деятельности, второй – в основном, механической, при этом протекает он обычно наиболее долго; третий этап пролетает мгновенно, а игроки почти не ощущают его существования. Обычно для аналитика ситуация диаметрально противоположна, и в большинстве случаев первые два этапа не имеют никакого реального значения – вся игра целиком рассматривается в пределах конечного этапа. Целью данного раздела является анализ игры в полном ее объеме, и теперь, когда первые этапы рассмотрены, необходимо уделить внимание самому сложному, но самому естественному этапу всей игры.

Когда наступает развязка (даже принимая за единицу времени «мгновение»), игрок не способен повлиять ни на что. Таким образом, все, что связано с этапом развязки, происходит само собой по правилам игры.

Прежде чем приступить к рассмотрению общего вида развязки, необходимо рассмотреть такую игру, в которой ведущим является один из игроков. Здесь под ведущим подразумевается такой игрок, который может непосредственно повлиять на исход игры, когда для всех остальных игроков, не являющихся ведущими (пускай их даже несколько), заканчивается этап воплощения. Поскольку этап развязки наступает одновременно для всех игроков, то для ведомых игроков время останавливается и происходит «закулисная» игра.

Ведущий игрок, например, может случайным (специальным) образом перераспределить выигрыши, и это перераспределение выигрышей является его стратегией. Если ведущих игроков несколько, такие действия относятся к кооперативной теории игр, а для некооперативной теории значение имеет сама модель поведения с подходящим распределением в рамках рациональности, особенно, если ведущему игроку в другой игре предстоит стать ведомым, а «хорошее мнение» необходимо закрепить.

В игре $Г=\left〈A∪B=I,\left\{S\_{i}\right\}\_{∀i\in I},\left\{u\_{i}\right\}\_{∀i\in I}\right〉$: A – множество ведущих игроков, а В – множество ведомых игроков, где $A∩B=∅$. Тогда для игрока $j\in A$ игровая ситуация $s'\_{-j}$, гипотетическая в общем виде, является реальной. В этом случае $j\left(s^{'}\_{-j}\right)=s\_{j}$ дает оптимальную игровую ситуацию $(s^{'}\_{-j},s\_{j})$ для игрока j, при рациональности его действий. Если правила не запрещают, игрок j может забрать себе весь возможный выигрыш, а остальных оставить ни с чем, либо даже заставить их «доплачивать». Однако, те или иные соображения игрока будут либо способствовать такого рода действиям, либо их предотвращать – все зависит от используемой концепции решения. В случае коалиционной борьбы, т.е. $A≢j$, действуют правила кооперации, если игроки желают сотрудничать, либо отдельные коалиции действуют друг против друга (некооперативная составляющая), а игроки в них действуют сообща (кооперативная составляющая).

Итак, когда игровая ситуация $\left(s'\_{i},…,s''\_{j}\right)=s$ воплощена, происходит действительное распределение реальных выигрышей, на которое ни один из игроков не в состоянии повлиять. В соответствии с индивидуальной функцией $u\_{i}\left(s\right)$ игроки получают соответствующие выигрыши.

Получение выигрыша $u\_{i}\left(s\right) ∀i\in I$ есть основной стимул действий игроков, но так как в реальности стимулы бывают абсолютно разные, причем, в одной игре у разных игроков эти различия могут быть кардинальными (как, например, желание одного игрока обеспечить себе материальное благополучие, а другого – получить выгодную должность или повлиять своими действиями на мнение остальных о себе), то необходимо определить некую универсальную единицу измерения выигрыша. В случае присутствия различных по своей характеристике объемных параметров выигрыша аналитик рискует попасть в сложное и спутанное положение, вследствие чего распределение в у.е. – наиболее удобное, универсальное и применимое.

Оценка выигрыша, как утверждалось ранее – основа любого из игровых этапов, и каждый из них так или иначе опирается на соответствующие положения. Например, оценка $u\_{i}(s\_{-i},s^{'}\_{i})>u\_{i}(s\_{-i},s"\_{i})$ практически всегда означает $s'\_{i}≻s"\_{i}$, однако различия и нюансы суть лишь нюансы.

Оценка выигрыша в рамках конечного этапа имеет своими задачами определение результатов игры в глобальном смысле. К понятию результата игры следует отнести результат выигрышный, игровой, моральный и совокупный.

1) Выигрышный результат.

Под выигрышным результатом понимается материальная составляющая выигрыша, т.е. показатель, выраженный аналитически в у.е., а для игрока в конкретных образах – деньгах, признании и др. Выигрышный результат «ощущается» сразу с завершением игры, поскольку разрешается игровой конфликт, и игроки в развязке видят результаты своих действий. Выигрыш, даваемый стратегией, так или иначе, оказывается в руках игрока.

Основная и единственная задача анализа нечестных игр состоит в определении выигрышного результата и соответствующих последствий. Что касается честных игр, то все характеристики должны рассматриваться вкупе. Таким образом, определение выигрышного результата – основа анализа любой игры, в том числе, на любом этапе игры для самого игрока.

2) Игровой результат.

В каждой отдельной игре игрок приобретает совокупный опыт, который далее влияет на игровые действия. Игровой результат – реакция игрока на реальное применение стратегии, соответствие и различия в гипотетической и реальной игровых ситуациях. Далее, в прочих играх, этот игрок будет более осторожен, насторожен, доверчив или недоверчив к сообщающейся информации, к гипотетическим профилям и т.д., что повлияет на его действия, т.е. выбор стратегии, отчего будет зависеть исход игры.

Считая игроков априори рациональными, предполагается, что каждый из них анализирует игровой результат как совокупность факторов, решающим из которых являются его собственные действия и действия оппонентов. Соответствующая реакция выражается не в данной игре и к ней не относится, но относится к играм последующим, как и все прочие элементы выигрыша.

3) Моральный результат.

Одной из целей игры может быть изменение мнения игроков о себе (игра «Студент – профессор», один из вариантов дилеммы заключенного). При этом соответствующий выигрыш относится к соответствующему компоненту результата. Однако целью игры может быть влияние на игрока А, в то время как влияние на игрока В не представляет интереса, т.е. не влияет на выигрыш. Но такое влияние все же может быть оказано, а чаще всего именно так и происходит.

Совокупность изменений в отношениях всех игроков к конкретному есть моральный результат для этого игрока. Он так же влияет не на эту игру, а на последующую. Причем, важно отметить, что изменения отношений возникают не только в играх, имеющих соответствующие (хоть сколько-нибудь) цели. Так же и в других играх могут возникать такие изменения, и тогда доверие между игроками, уже в другой игре, может быть значительно подорвано, хотя этого изначально, в прошлой игре, даже не предполагалось. Такие ситуации наглядно демонстрируют игры с ведущими игроками.

Важно отметить, что эти изменения часто влекут за собой отклонения от равновесных по Нэшу игровых ситуаций (в последовательных играх).

4) Совокупный результат.

Последний компонент результата – собственно, итог игры для ее участника, – совокупный результат. Приобретения по одному из показателей могут заглушаться серьезными потерями в другом. Например, игрок понял, какие стратегии стоит применять в данной игре, а каких стоит избегать; игрок понимает, кто из оппонентов настроен доброжелательно к нему, а кто напротив, но все эти достоинства от применения некой стратегии могут глушиться, например, гибелью игрока, и тогда никакие прочие результаты не имеют смысла (для данного игрока, кроме того, с разумной нюансировкой).

Постулат рациональности предполагает, что игроки не применяют доминируемые стратегии, но каждый игрок индивидуально определяет эти характеристики, о чем говорит непредсказуемость функции $i(s\_{-i})$. Кроме того, как утверждалось ранее, функция выбора определяется от гипотетической игровой ситуации, соответственно, подобный результат может существовать.

Совокупный результат объединяет все прочие и определяет поведение игрока в будущем, а общий совокупный результат – общие тенденции поведения группы.

## РАЗДЕЛ III. АЛЬТРУИЗМ В ТЕОРИИ ИГР

Альтруизм, как общественно-социальное явление представляет собой готовность к бескорыстным действиям в пользу другим, вероятно, даже влекущее лично неблагоприятные последствия. Альтруистическое поведение может сопутствовать материальным потерям и может казаться нелогичным и нерациональным.

Представим ситуацию альтруистичного поведения в природе, которую нередко приводят в пример критики биологической потребности в сохранении вида или главной цели живого организма в росте популяции вида. При миграции по саванне антилопам необходимо перейти реку, кишащую крокодилами. Наиболее старые антилопы принимают решение кинуться в воду, чтоб привлечь внимание крокодилов и дать возможность более молодым антилопам перейти вброд и продолжить миграцию.

Разумеется, такая ситуация нереальна по причине бессмысленности. Данный пример иллюстрирует бездумный и нерациональный альтруизм.

В теории игр имеет смысл рассматривать только рациональных игроков, следовательно, альтруизм обязан подчиняться рациональным законам (альтруистичные стратегии обязаны быть недоминируемыми и т.п.). С другой стороны, при последовательности игр большее значение имеет совокупный результат. Любая альтруистичная должна быть результатом применения рациональной концепции решения.

Каким может быть рациональный альтруизм? Сам по себе альтруизм можно разделить на следующие группы:

* Бездумный альтруизм. Игрок поступает нерационально, будучи готовым потерять многое ради другого игрока, не взирая на собственный выигрыш. Такая стратегия принимается из принципа «все ради других». Бездумный альтруизм может также приводить к потерям у других игроков. Поскольку данный пример является нерациональным, то здесь он приведен исключительно для создания общей картины и в дальнейшем исследоваться не будет.
* Абсолютный эгоизм. Игрока не волнует положение дел его оппонентов. Стратегия повинуется принципу «все ради себя». При такой игре у эгоиста есть шанс получить плохую репутацию, что сказывается на моральном результате.
* Альтруистичный эгоизм. В этой модели игрок действует по принципу «помогу, но только если сам получу что-то взамен»
* Одиночный альтруизм. Игрок-альтруист действует рационально, при этом движущей его силой является принцип «все во благо другого, но не в ущерб себе». Такое поведение ориентируется на совокупный результат, но ущерб может быть нанесен другим игрокам. Этот ущерб не учитывается игроком при принятии решения, поскольку не входит в область его интересов.
* Абсолютный альтруизм. Такой игрок принимает решения, учитывая все возможные последствия из принципа «всем во благо и себе не в ущерб». При таких действиях результат сильно зависит от выбора стратегий другими игроками. Задача абсолютно альтруистичного игрока – создать устойчивую для отклонений (выигрышную) ситуацию.

Два последних типа поведения иллюстрируют рациональную модель действий. Одиночный альтруизм возможен во всех играх, где один из игроков полностью влияет на ход и исход кампании (игры с ведущим игроком). Важно отметить, что альтруизм всегда направлен на другого игрока, иначе действия эгоистичны. Тем не менее, ведущий игрок может провести распределение таким образом, чтобы нужный игрок получил больше, чем ему причитается. Однако, в этом случае игровая ситуация изменяется таким образом, что эта самая «добавка» забирается у третьего игрока (будь то обычный игрок или, например, благотворительный фонд), то есть данную стратегию поведения нельзя отнести к абсолютно альтруистичным.

Критерием одиночного альтруизма $s'$ является система неравенств для игрока $i$ – «цели» альтруизма и $j$ – игрока-альтруиста:

$$\left\{\begin{array}{c}u\_{i}(s')>u\_{i}(s)\\u\_{j}(s^{'})\geq u\_{j}(s)\end{array}\right.$$

где

$$\left(s^{'}\right)=(s\_{i}^{'},s\_{j}^{'},s\_{-ij})$$

Абсолютный альтруизм для тех же игроков характеризует другая система:

$$\left\{\begin{array}{c}∃i\in I: u\_{i}(s')>u\_{i}(s)\\u\_{j}(s^{'})\geq u\_{j}(s)\\u\_{n}\left(s^{'}\right)\geq u\_{n}\left(s\right) ∀n\in I\end{array}\right.$$

Большее количество условий сужает возможности для существования подобных игровых ситуаций. Например, ни одна из игр, упомянутых в первом разделе, не содержит возможностей для абсолютно альтруистичного поведения. Поскольку $s'$ должна быть устойчивой к отклонениям, то она должна быть и равновесной по Нэшу.

Вследствие наличия этих условий необходимо сначала рассмотреть игровую ситуацию $s$. Данная игровая ситуация создана взаимодействием рациональных игроков, кроме того, игрок $i$ также является рациональным. Различие ситуаций $s$ и $s'$ может быть связано с ошибкой, при этом связанной с иной моделью рациональных действий.

Рассмотрим игру «Гарвард». Пускай в определенный момент складывается такая игровая ситуация, когда все игроки, кроме двух сделали свой выбор в пользу стратегии $s=1$, т.е. формируется игровая ситуация $s\_{-ij}$. Игрок $i$ пользуется опытом и делает выбор в пользу стратегии, ожидаемо приносящей ему большее, т.е. близкой к среднестатистическому среднему пополам (число, заведомо большее 1 или $s\_{i}=p$). Игрок $j$ желает сыграть таким образом, чтобы все игроки оказались победителями, т.е. среднее пополам было одинаково близко ко всем названным значениям. Игрок $j$ делает выбор в пользу $s\_{j}=q$. Вопрос: возможно ли это?

Количество игроков обозначим за $n$, тогда должно выполняться условие

$$\left|p-\frac{\left(n-2\right)+p+q}{2n}\right|=\left|q-\frac{\left(n-2\right)+p+q}{2n}\right|=\left|1-\frac{\left(n-2\right)+p+q}{2n}\right|$$

Заметим, что $q$ либо равно $1$, либо равно $p$, причем $p>1$. В обоих случаях имеем

$$\left|p-\frac{n-2+2p}{2n}\right|=\left|1-\frac{n-2+2p}{2n}\right|⇔p-\frac{n-2+2p}{2n}=\frac{n-2+2p}{2n}-1⇔⇔p+1=\frac{n-2+2p}{n}⇔qn=2q-2⇔q\left(n-2\right)=-2$$

Поскольку все переменные строго положительные и $n>2$, получаем противоречие.

Таким образом, в игре «Гарвард» действительно невозможна альтруистичная игра. В случае, если игрок $j$ будет играть на победу $i$ (такая игра возможна, если $p$ не слишком большое, поскольку выбор стратегий ограничен сверху), он вынужден использовать стратегию, значение которой больше, следовательно, он сам проигрывает, а поведение нерационально.

В приведенной игре абсолютно альтруистичное поведение невозможно, вследствие чего возникает вопрос: возможно ли такое поведение вообще?

**Определение.** Абсолютно выигрышной стратегией называется множество всех стратегий $S^{α}$ в игре $Г=\left〈I,S=\left\{S\_{i ∀i\in I}\right\},U=\{u\_{i ∀i\in I}\}\right〉$, где

$$∀\tilde{s}\_{j}^{\*}\in S^{α}: u\_{i}(s\_{-j},\tilde{s}\_{j}^{\*})\geq u\_{i}\left(s\_{-j},\tilde{s}\_{j}\right) ∀i\in I$$

**Теорема об абсолютно выигрышной стратегии.** Множество абсолютно выигрышных стратегий не является пустым.

$$∃Г: S^{α}\ne ∅$$

Формулировка теоремы не выглядит сложной. Фактически удовлетворительным результатом будет как доказательство теоремы, так и ее опровержение. Для доказательства достаточно привести пример игры, для опровержения необходимы строгие математические рассуждения.

Как утверждалось ранее, ни одна из приведенных в первом разделе игр не содержит возможностей альтруистичного поведения, следовательно, условие теоремы не удовлетворено.

Игра, содержащая множество абсолютно выигрышных стратегий, обязана удовлетворять следующим требованиям:

1. $\left|I\right|\geq 3$. Игроков не может быть менее трех, поскольку кроме непосредственно действующих альтруиста и его цели, имеется хотя бы один сторонний игрок, который влияет (и на которого оказывается влияние) извне.
2. Игровая ситуация $s\_{-ij}$ (где $i$ – цель альтруизма, а $j$ – альтруист) устойчива к отклонениям прочих игроков, поскольку приводит к, как минимум, одному равновесию Нэша – ситуации $(s\_{-j},\tilde{s}\_{j}^{\*})$. Также шансы стать равновесием Нэша имеет ситуация $(s\_{-i},s^{'}\_{i})$. Последняя игровая ситуация появляется при взаимодействии рациональных игроков, причем при отклонении у отклонившегося игрока ухудшается положение дел.
3. Данная игра должна отображать реальный конфликт с реальными целями, мотивами и соответствующими выигрышами, а не быть «подогнанной» под цель исследования. Любые действия игроков в завязке, все выборы стратегий, в том числе, игроком-альтруистом, должны быть рационально оправданными.
4. Ошибка игрока $i$ должна быть мотивирована желанием получить как можно больший выигрыш при минимальных рисках. Таким образом, в каких-то концепциях решения другие игроки (в представлении $i$) гипотетически должны выбрать соответствующие стратегии, а в какой-то концепции решения, сам игрок $i$ в этих условиях выбирает на деле ошибочную стратегию.

Главным условием, несомненно, является условие абсолютно выигрышной стратегии, т.е. такой, что она не ухудшает положение ни одного игрока, включая того, кто эту стратегию применяет.

Для опровержения существования абсолютно выигрышной стратегии потребуется рассмотреть эффективность каждой из ситуаций по Парето, а также провести явный анализ $n$ функций $n $переменных каждая при $\left|I\right|=n$. Такой анализ требует большой теоретической и практической подготовки на фундаментальном уровне.

## Заключение.

Теория игр в современном мире является важным разделом прикладной математики и играет ключевую роль во многих областях науки. Тем не менее, рациональный характер игрока является важнейшей характеристикой математической природы теории игр. Любые упрощения в рассуждениях могут допускаться исключительно с учетом рациональности, любое поведение должно подчиняться этому критерию.

Данная работа не может точно и окончательно ответить на вопрос о возможности альтруистического поведения, однако предоставляет необходимые и достаточные критерии игры с альтруистическим поведением для будущих исследований. Концепция игрового анализа как готовая модель может быть также дополнена и развита в будущем.

Теория игр имеет большие перспективы в своем развитии, как и основания этой работы в частности. Также немалы возможные объемы ее применения в социологии, политологии, экономике, психологии, биологии.

На сегодняшний день большое внимание уделяется кооперативной теории игр в ущерб некооперативной. Данная работа напоминает о важности развития некооперативной теории игр, поскольку в ней до сих пор являются незаполненные пробелы, что недопустимо по состоянию на третье десятилетие XX века.

## Список использованной литературы.

1. Nash, John F. Non-Cooperative games, Принстонский университет (май 1950)
2. Петросян Л. А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов. — М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. — С. 304. — ISBN 5-06-001005-8
3. John Maynard Smith. (1982) Evolution and the Theory of Games. ISBN 0-521-28884-3.
4. Berne E. Transactional Analysis in Psychotherapy. New York: Grove Press, 1961
5. Евгений Гик. Компьютерные шахматы. — М.: ФАИР, 1997. — 272 с. — (Спорт). — ISBN 5886410465
6. https://www.youtube.com/watch?v=1xz9hoTaUaE