|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | |  | |
|  |
| **Применение производной**  **при решении заданий ЕГЭ** |

учитель математики: Кузьмина София Сергеевна

МБОУ «Бердигестяхская улусная гимназия»

Горный улус, Республика Саха(Якутия)

2020 г.

Изучение производной в школьном курсе – сложная тема. И усвоение этого материала учащимися требует от учителя довольно значительных затрат времени и сил. Однако, следует понимать, что понятие производной является фундаментальным для более сложных разделов высшей математики, и без четкого понимая смысла этого математического термина невозможно освоение математики, а также других, связанных с этим понятием наук, как физика, химия, информатика, экономика и др.

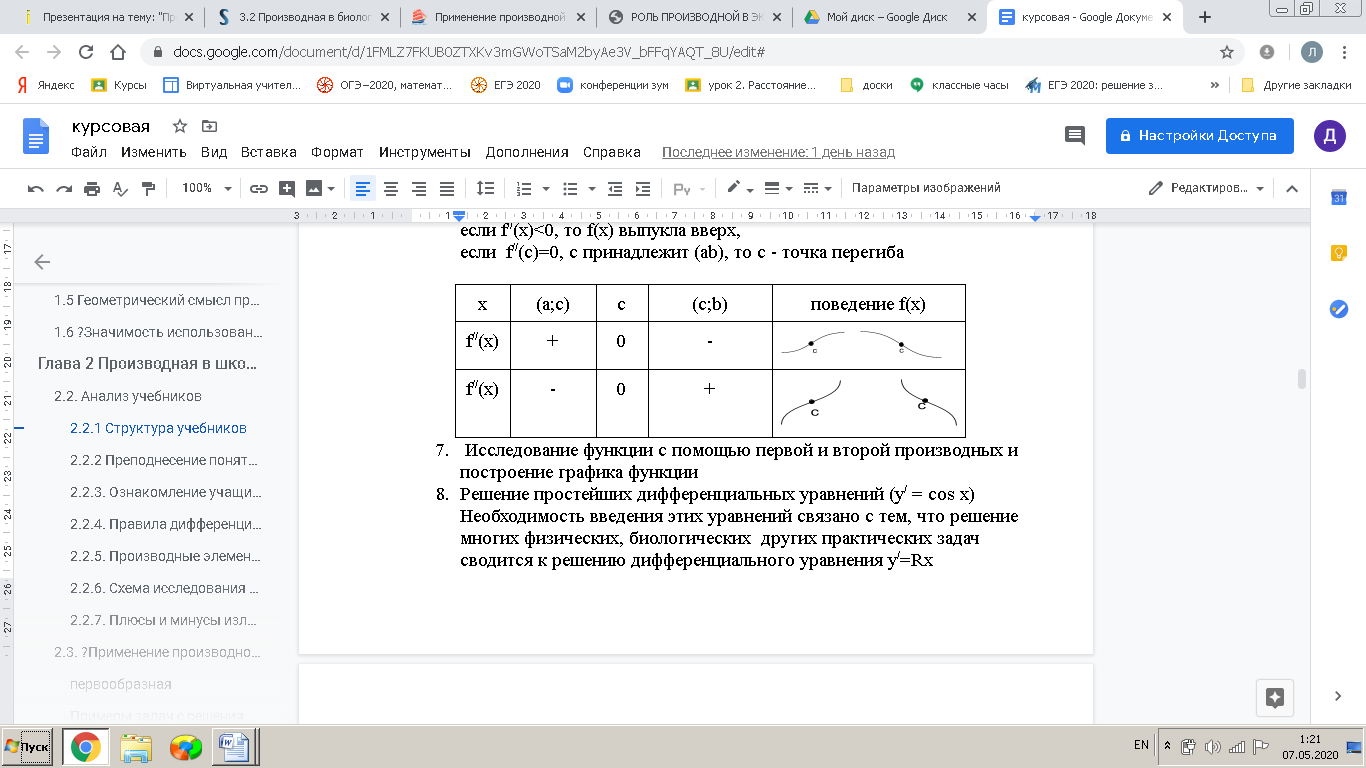
Тема «Производная» включена в ЕГЭ профильную математику, это задание №7 (производная и первообразная) и №12 (наибольшее и наименьшее значении) (I часть).

Также некоторые задачи из II части: №17 (финансовая задача), №18 (задачи с параметром) можно решать с помощью производной.

Цель данной статьи – рассмотреть систему изучения производной в школьном курсе, выявить трудности восприятия материала школьниками, показать некоторые методы обучения учащихся, помогающие лучшему усвоению ими данной темы.

## Виды задач с использованием производной в школьном курсе

* Нахождение мгновенной скорости (vмгн=s/(t))
* Уравнение касательной к графику функции y=f(x0)+f/(x0).(x-x0)
* Возрастание/убывание функции (f/(x)>0=>f(x) ↑, f/(x)<0 => f(x)↓)
* Нахождение экстремумов функции (точки максимумов и минимумов)
* Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на интервале.

1. Выпуклость и вогнутость графиков функции, нахождение точек перегиба, с использованием второй производной.  
 

2.Исследование функции с помощью первой и второй производных и построение графика функции.

# 2.1 Трудности при изучении учащимися темы «производная»

При переходе из среднего звена обучения в старшее, когда начинается изучение «Алгебра и начала анализа» в 10-м классе учащиеся испытывают достаточно большие трудности. Это касается и темы «Производная».

Для того, чтобы учащиеся умели формулировать определение производной, вычислять производную, применять её при решение задач, связанных с исследованием функции, необходимо, чтобы они четко понимали понятие производной. Поэтому в самом начале изучения темы следует вводить учебный материал на доступном уровне, чтобы трудности были посильными.

Рассматривать физический смысл производной можно начинать с понятного учащимся понятия средней скорости за определенное время.

Представим себе, что мы едем в автомобиле. В любой момент времени мы можем определить пройденное расстояние (по счетчику километража) и скорость (по спидометру). С движением автомобиля, как и с движением любой материальной точки, связаны величины: путь S и скорость V, которые являются функциями времени t.

Основными математическими понятиями, выражающими эту связь, являются производная и интеграл. Найдем среднюю скорость на отрезке [a;b]   
vср =, начнем уменьшать , приближая b к a. В какой-то момент времени b станет равным a, а =0. тожебудет равно 0. Скорость в этот момент и называется мгновенной.

То есть при стремлении к 0, vср стремится к vмгн.

В математике такое «стремление» называют пределом и обозначают: Vмгн=

В школьном курсе производная функции в точке X определяется как предел разностного отношения.С понятием предела учащиеся незнакомы. Поэтому необходимо ввести понятие предела на нескольких простых задачах.

Пример 1. Дан квадрат со стороной 1. Разделим его пополам, затем половину пополам, затем четверть пополам и так далее. Получим последовательность чисел:

Данная последовательность является бесконечной убывающей геометрической прогрессией, изучаемой в 9 классе.

сумма чисел в целом дает 1 (так как площадь квадрата 1).

Значит предел, к которому стремится сумма всех данных чисел, при неограниченном увеличении знаменателя есть число 1.

Вернемся к задаче о нахождении мгновенной скорости:

Vмгн = Отношение называют разностным отношением.

Предел разностного отношения при стремлении к 0 называют производной пути по времени и обозначают Vмгн

Производной функции называют предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последней к нулю.

**3.1.Применение производной при решении задач ЕГЭ**

Задание №7 подразделено на следующие группы:

1. физический смысл производной
2. геометрический смысл производной
3. применение производной к исследованию функций
4. первообразная

Теоретический материал для решения задания №7 ЕГЭ удобно представить учащимся в виде таблицы, проводя соответствие между геометрическим и физическим смыслом производной .

Таблица для подготовки к ЕГЭ

|  |  |
| --- | --- |
| **Геометрический смысл производной** | **Физический смысл производной** |
| Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке (тангенсу угла между касательной и осью Ох)  *f’(хo) = k = tg α* | Если точка движется вдоль оси х и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки: *V(t)=x’(t)* |
| * Если f’(x) > 0 на промежутке, то функция f(x) возрастает на этом промежутке.   Если f’(x) < 0 на промежутке, то функция f(x) убывает на этом промежутке | * Если функция f(x) возрастает на промежутке, то f’(x) > 0 на этом промежутке.   Если функция f(x) убывает на промежутке, то f’(x) < 0 на этом промежутке |
|  |  |
| Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны |  |
| * Точка хo называется точкой максимума функции *f(х)*, если существует такая окрестность точки *хo*, что для всех *х≠ хo* из этой окрестности выполняется неравенство *f(х) < f(хo)*. * Точка *хo* называется точкой минимума функции *f(х)*, если существует такая окрестность точки *хo*, что для всех *х≠ хo* из этой окрестности выполняется неравенство *f(х) > f(хo) = 0*. * Если *хo* – точка экстремума функции *f(х)*, то *f’(хo) = 0*. | Пусть функция *f(х)* дифференцируема на интервале  *(a;b)*, *хo Є (a; b)* и *f’(хo) = 0*, то:   * при переходе через стационарную точку *хo* функции *f(х)* ее производная меняет знак с «плюса» на «минус», то *хo* – точка максимума функции *f(х)*; * при переходе через стационарную точку *хo* функции f(х) ее производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то *хo* – точка минимума функции *f(х)*. |

Так как все задания №7 ЕГЭ можно разделить (по форме заданий) на 3 вида:

Дан график функции

Дан график производной

Графики в задании отсутствуют

То таблицу заданий и направления хода решений удобно заполнять именно в таком порядке: (график функции, график производной, отсутствие графиков)

Следует акцентировать внимание учащихся на данных в условии задачи, так как они часто на экзамене не обращают внимание – график функции или график производной.

Примеры заданий

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Задание | Что делать? |
| 1 | На рисунке изображен график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке *х0*. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке *x0*. | Найти тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс (отношение противолежащего катета к прилежащему катету). На рисунке выделены точки на касательной, на которых как на гипотенузе надо достроить прямоугольный треугольник.  Если α <900, то tg α >0, если α >900, то tg α <0. |
| 2 | На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определённый на интервале (-10;2). Найдите количество точек, в которых производная функции *f(x)* равна 0. | Подсчитать количество точек экстремума(минимумы и максимумы) |
| 3 | На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определённый на интервале (-1;12). Найдите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна. | Подсчитать целые точки на промежутках убывания функции |
| 4 | На рисунке изображен график функции *y=f(x)* и отмечены точки -2, -1, 2, 3. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку. | *x=-2*, то *f ↓ => f’ <0*  *x=-1*, то *f* имеет экстремум  *=>f’=0*  *x=2*, то *f ↑ => f’ >0 x=3*, то *f ↓ => f’ <0* |
| 5 | На рисунке изображён график дифференцируемой функции *y=f(x)*, и отмечены семь точек на оси абсцисс: *х1, х2, х3, х4, х5, х6, х7, х8,х9* . В скольких из этих точек производная функции *f(x)* отрицательна? | В скольких точках функция убывает |
| 6 | На рисунке изображён график функции *y=f(x),* определённой на интервале (-3;9). Найдите количество точек, в которых касательная к графику *f(x)* параллельна прямой *y=12*. | Т.к. угловой коэффициент прямой *y=12* равен *0*, то считаем количество точек пересечения с осью Ох. |
| 7 | На рисунке изображён график *y=f’(x) –* производной функции *f(x),* определённой на интервале (-9;3). Найдите количество точек, в которых касательная к графику *f(x)* параллельна прямой *y=2x-19* или совпадает с ней. | Провести горизонтальную прямую *y=2* и сосчитать количество точек пересечения с графиком. |
| 8 | На рисунке изображен график функции *y=f’(x ) –* производной функции *f(x),* определённой на интервале (-6;5). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки. | Промежутки убывания функции  =производная на данном графике отрицательна, т.е.расположена ниже оси Ох. Найти сумму целых точек. |
| 9 | На рисунке изображен график функции *y=f’(x ) –* производной функции *f(x),* определённой на интервале (-8;6). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них. | Промежутки возрастания функции =производная на данном графике положительна, т.е.расположена выше оси Ох. Записать длину большего промежутка |
| 10 | На рисунке изображены график функции *y=f’(x ) –* производной функции *f(x)* и семь точек на оси абсцисс: *х1, х2, х3, х4, х5, х6, х7*. В скольких из этих точек функция *f(x)* возрастает? | Сосчитать количество точек, в которых производная на данном графике положительна |
| 11 | На рисунке изображен график производной функции *y=f’(x),*  определенной на интервале (-7;4). В какой точке отрезка [-6;-1] функция *f(x)* принимает наибольшее значение? | На отрезке [-6;-1] производная положительна (лежит выше Ох)  => функция возрастает, т.е. достигает наибольшего значения при наибольшем значении аргумента => *-1*  Значит в *х=-6* достигает наименьшего значения. |
| 12 | На рисунке изображён график *y=f’(x) –* производной функции *f(x),* определённой на интервале (-7;4). Найдите точку максимума функции *f(x).* | Находим точку на оси Ох, в которой производная меняет свой знак с «+» на «-»  => -1 |
| 13 | На рисунке изображён график *y=f’(x) –* производной функции *f(x),* определённой на интервале (-10;8). Найдите количество точек максимума функции *f(x)*, принадлежащих отрезку [-9;6]*.* | Находим точки на оси Ох, в которой производная меняет свой знак с «+» на «-»  => *х= -4 и х=4* => 2 |
| 14 | На рисунке изображён график *y=f’(x) –* производной функции *f(x),* определённой на интервале (-16;4). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)*, принадлежащих отрезку  [-14;2]*.* | Считаем количество точек пересечения графика производной на рисунке с осью Ох => 5 |
| 15 | Материальная точка движется прямолинейно по закону *x(t)=t2-3t-29*, где *x* – расстояние от точки отсчета в метрах, *t* – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её  скорость (в метрах в секунду) в момент времени *t=3с*. | *V(t=3)=x’(t)=( t2-3t-29)’=*  *=2t-3=2\*3-3=3* |
| 16 | Материальная точка движется прямолинейно по закону *x(t)=1/6t3-2t2-4t+39*, где *x* – расстояние от точки отсчета в метрах, *t* – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равной *38м/с*. | *V(t)=x’(t)=( 1/6t3-2t2-4t+39)’=*  *=1/6 \*3t2-2\*2t-4=0.5t-4t-4*  Если *V=38,* то *0.5t2-4t-4=38*  *0.5t2-4t-4-38=0 t2-8t-84=0*  Решая уравнение через D, находим *t=14* |
| 17 | Прямая *y=6x+9* параллельна касательной к графику функции  *y=x2+7х-6*. Найдите абсциссу точки касания. | Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. Найти производную функции (*x2+7х-6)’=2x+7=kкас=6*  *=> x=-0,5* |
| 18 | Прямая *y=-9x+5* параллельна касательной к графику функции  *y=аx2+15х+11*. Найдите *a*. | Найти производную функции (*аx2+15х+11)’=2a+15= -9*  *=> a= -12* |

## Виды заданий №12

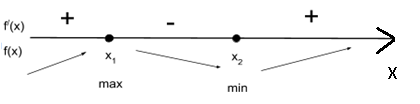
Задания №12 можно разбить на 2 основных типа:

* Нахождение точек максимума/минимума функции
* Нахождение наибольшего/наименьшего значения функции на отрезке [a;b]

Для успешного решения этих задач необходимо знать таблицу производных.

Алгоритм решения :

I Алгоритм нахождения максимума/минимума функции

* Найти f’(x)
* Решить уравнение f’(x)=0
* Определить знаки производной и найти точки экстремума 

II Алгоритм нахождения наибольшего/наименьшего значения функции

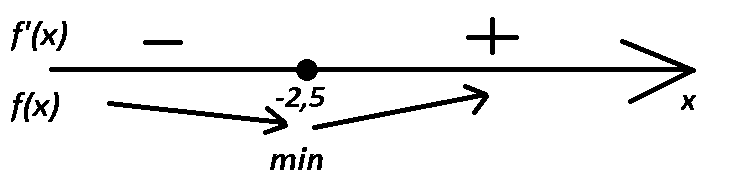
* Найти f’(x)
* Решить уравнение f’(x)=0
* Определить знаки производной и найти точки экстремума на отрезке
* Вычислить значение функции в точках экстремума и на концах отрезка f(a), f(x1), f(x2), f(b)
* Выбрать наибольшее/наименьшее значение функции

Пример: Найдите точку минимума функции

Решение:

1)

2) =0 =0



## 

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

**Учебники**

1. «Алгебра и начала математического анализа», 10-11 класс, (под редакцией   
   Ш. А. Алимова), Москва «Просвещение», 2019 год.
2. «Алгебра и начала математического анализа», 10-11 класс, (под редакцией   
   М.И. Башмакова), Москва, Издательский центр «Академия», 2014 год.
3. «Справочник по высшей математике», М. Я. Выгодский   
   АСТ: АСТРЕЛЬ, 2006 год.

**Статьи**

1. Статья Кочержова, Баташева, Цыплакова «роль производной в экономике»
2. Письменные конспекты Павловой ЛВ с семинаров Жигулева Леонида Александровича (курсы повышения квалификации учителей АПО 2007 год)

**Интернет- ресурсы:**

1. Сайт Решу ЕГЭ <https://ege.sdamgia.ru/>
2. Презентация Епихина Е.В. «Применение производной в биологии и химии» <https://nsportal.ru/ap/library/nauchno-tekhnicheskoe-tvorchestvo/2014/03/04/primenenie-proizvodnoy-v-khimii-i-biologii>
3. Исследовательска работа «Применение производной в различных областях» (пункт 3.2) <https://studfile.net/preview/8122966/\>
4. <https://vuzlit.ru/2303755/istoricheskie_svedeniya_proizvodnoy>
5. Дифференциальные исчисления <https://textarchive.ru/c-2998324.html>
6. Применение производной различных областях <https://infourok.ru/primenenie-proizvodnoy-v-razlichnih-oblastyah-nauki-1502745.html>
7. Исследовательская деятельность. Производная. <https://infourok.ru/issledovatelskaya-deyatelnost-proizvodnaya-v-obscheobrazovatelnih-klassah-i-v-klassah-s-uglublennim-izucheniem-matematiki-731784.html>
8. Урок по теме касательная <https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/584315/>
9. Открытый урок по теме «Геометрический смысл производной» <https://infourok.ru/otkritiy-urok-po-teme-geometricheskiy-smisl-proizvodnoy-prezentaciya-i-konspekt-uroka-619934.html>

# Приложение

**Физический смысл производной:**

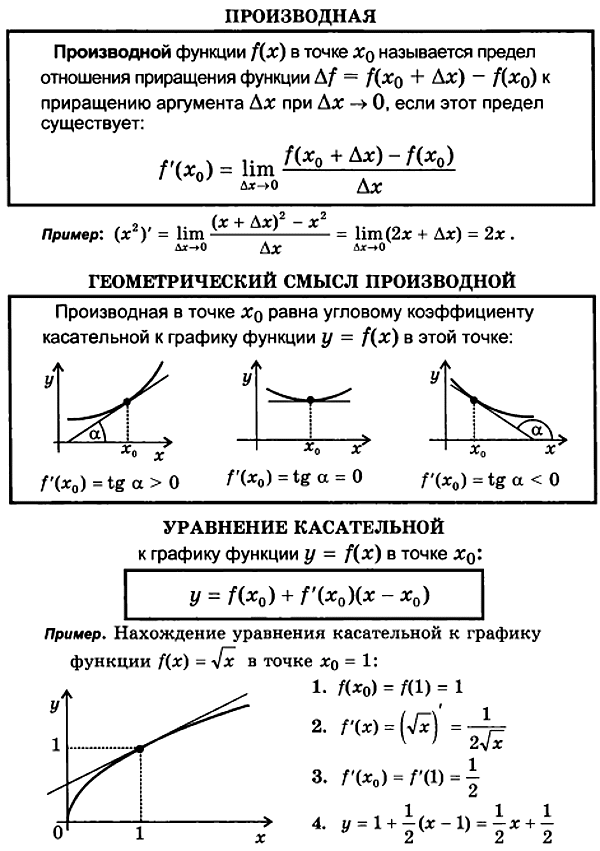
Если – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t:

Если некоторый процесс протекает по закону , то выражает скорость протекания процесса в момент времени t

**Определение производной:**

**Геометрический смысл производной:**

Производная в точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке



**Формулы для нахождения производных элементарных функций:**

**Правила дифференцирования производных:**